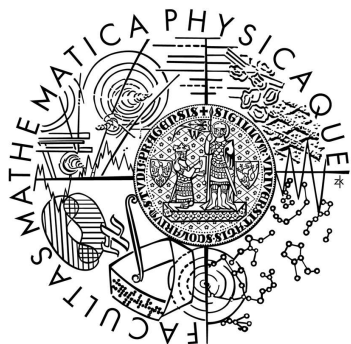


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Simona Novotová

Oceňování pomocí stromů úrokových měr

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Katarína Starinská

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2012

Rada by som sa poďakovala predovšetkým vedúcej mojej práce Mgr. Kataríne Starinskej za množstvo času a ochotu, s ktorou sa mi venovala, za všetky jej rady, pripomienky a poskytnuté materiály.

Ďalej by som sa chcela poďakovať svojim rodičom za podporu počas písania tejto práce a behom celého štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Oceňování pomocí stromů úrokových měr

Autor: Simona Novotová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Katarína Starinská, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce sa zaoberá stromami úrokových mier, ich konštrukciou a využitím pri oceňovaní. V úvode sa práca venuje rôznym typom úročenia a vybraným finančným derivátom, ktoré je v praxi potreba správne oceniť. Na ocenenie je potrebná znalosť vývoja úrokových mier, na ktorých modelovanie sa používajú rôzne stochastické modely. V ďalšej časti je ponúknuté zhrnutie modelov. Pre dva modely (Rendelmanov-Barterov a Hull-Whiteov model) je študovaná konštrukcia binomického a trinomického stromu. V práci je popísaný dvojfázový algoritmus, ktorý je následne použitý na vygenerovanie trinomického stromu. Úrokové miery získané zo zostrojeného stromu sú využité na ocenenie opcie na dlhopis.

Klíčová slova: binomický strom, trinomický strom, modely úrokových mier

Title: Pricing with interest rate trees

Author: Simona Novotová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Katarína Starinská, Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with interest rate trees, their construction and use in pricing. At the beginning, work deals with various types of interest and selected financial derivatives, which need to be properly priced. For pricing, it is necessary to know the evolution of interest rates, which is simulated by various stochastic models. Next section offers summary of the models. For two models (Rendelman-Barter and Hull-White model) the construction of a binomial and trinomial tree is studied. The work describes a two-phase algorithm, which is used for generation of trinomial tree. Interest rates obtained from the constructed tree are used for the valuation of bond options.

Keywords: binomial tree, trinomial tree, interest rate models

Obsah

Úvod	2
1 Základné pojmy z finančnej matematiky	3
1.1 Úročenie	3
1.1.1 Jednoduché úročenie	3
1.1.2 Zložené úročenie	4
1.1.3 Spojité úročenie	4
1.2 Časová štruktúra úrokových mier	4
1.3 Finančné deriváty	6
1.3.1 Forwardy	6
1.3.2 Futures	7
1.3.3 Opcie	7
2 Modely úrokových mier	9
2.1 Rendlemanov-Bartterov model	9
2.2 Vašíčkov model	10
2.3 Coxov-Ingersollov-Rossov model	10
2.4 Hoov-Leeov model	10
2.5 Hullov-Whiteov model	11
3 Stromy úrokových mier	12
3.1 Jednokrokový binomický strom	12
3.2 Viackrokový binomický strom	14
3.3 Trinomický strom úrokových mier	15
3.4 Konštrukcia trinomického stromu	15
3.4.1 Prvá fáza konštrukcie	16
3.4.2 Druhá fáza konštrukcie	18
3.4.3 Rozšírenie na iné modely	21
3.5 Oceňovanie opcií	22
3.6 Oceňovanie peňažných tokov	23
4 Aplikácia úrokových stromov	26
Záver	29
Zoznam použitej literatúry	30
Zoznam obrázkov	31
Zoznam tabuliek	32
Prílohy	33
Príloha č. 1	33

Úvod

Pri obchodovaní na finančných trhoch je dôležité správne oceniť jednotlivé finančné nástroje a peňažné toky. Medzi základné faktory určujúce cenu peňazí patrí úroková miera. Na jej základe je taktiež posudzovaná výhodnosť rôznych obchodných projektov a vplýva na stabilitu národnej meny.

Každá úroková miera je viazaná k určitému časovému obdobiu. Táto závislosť sa nazýva časová štruktúra úrokových mier a vyjadruje vzťah medzi výnosom a dobou splatnosti.

Obecne sa úroková miera považuje za náhodnú veličinu a výnos z finančných nástrojov často závisí na jej budúcom vývoji. Tento vývoj je možné rôznymi spôsobmi modelovať. Tradičný prístup k modelovaniu spočíva v definovaní spojitého stochastického procesu pre okamžitú úrokovú mieru.

Diskrétnu aproximáciu týchto procesov predstavujú binomické a trinomické stromy úrokových mier. Založené sú na predpoklade, že za jedno časové obdobie sa úroková miera môže zmeniť na jednu z dvoch resp. troch nových hodnôt. Jedno obdobie predstavuje jeden krok stromu. Široké použitie majú v oblasti financií a oceňovania. Využívané sú predovšetkým trinomické stromy, ktoré ponúkajú viac voľnosti pre vývoj úrokovej miery a zohľadňujú niektoré jej vlastnosti. V práci sa budeme zaoberať hlavne popisom týchto štruktúr.

Celá práca je rozdelená na štyri kapitoly. V prvej kapitole si uvedieme základné typy úročenia a časovú štruktúru úrokových mier. Taktiež sa zoznámime s terminológiou z oblasti vybraných finančných derivátov.

V druhej kapitole sa zameriame na jednofaktorové modely spotovej úrokovej miery, ktoré sú definované stochastickou diferenciálnou rovnicou.

Stromami úrokových mier sa budeme zaoberať v tretej kapitole. Zoznámime sa s pojmami binomický a trinomický strom úrokových mier. Zameriame sa na postup konštrukcie týchto stromov a následne si uvedieme možnosti využitia stromov pri ocenení opcií a finančných tokov.

V poslednej časti oceníme pomocou binomického a trinomického stromu opciu na bezkupónový dlhopis. Využijeme pritom teóriu z tretej kapitoly. Počet krokov oboch stromov budeme postupne zvyšovať a sledovať, ako sa s rastúcim počtom krokov bude meniť cena opcie.

1. Základné pojmy z finančnej matematiky

V tejto kapitole si uvedieme základné pojmy, ktoré budeme využívať v ďalších častiach práce. Predstavíme si typy úročenia, závislosť úrokových mier na čase, základné druhy finančných derivátov a ich parametre. Poznatzky uvedené v tejto časti pochádzajú predovšetkým z [2] a [3].

1.1 Úročenie

Dva základné princípy finančnej matematiky hovoria: „*Koruna dnes je lepšia ako koruna zajtra*“ a „*Čas sú peniaze*“. Znamená to, že hodnota finančných prostriedkov sa v čase mení a je potrebné ich správne oceniť. Prejavom časovej preferencie je úrok. Je to odmena veriteľovi za poskytnutú pôžičku vyjadrená v peňažných jednotkách. Práve výška úroku priamo ovplyvňuje hodnotu peňazí v čase. Zapožičaná čiastka sa nazýva istina. Úrok vyjadrený ako percentá z istiny sa označuje ako úroková miera resp. úroková sadzba.

1.1.1 Jednoduché úročenie

Základným typom úročenia je jednoduché úročenie. Budúcu hodnotu istiny FV (*Future Value*) získame jej zúročením cez celé obdobie

$$FV = PV(1 + in), \quad (1.1)$$

kde PV je istina alebo súčasná hodnota (*Present Value*), n značí počet období a i je úroková miera pre jedno obdobie. Toto označenie budeme používať v celej kapitole 1.

Úrok U sa po celú dobu trvania počíta len z istiny a pripisuje sa na konci doby trvania pôžičky. Matematicky sa zapisuje

$$U = PVin.$$

Budúca hodnota zapožičanej čiastky sa rovná súčtu istiny a úroku

$$FV = PV + U.$$

Jednoduché úročenie sa obvykle používa pre pôžičky zo splatnosťou menšou ako jeden rok. Opačný proces k úročeniu sa nazýva diskontovanie. Matematicky ho vyjadríme vzťahom

$$PV = FV \frac{1}{1 + in} = FV(1 - dn),$$

kde d označuje diskontnú mieru pre jedno obdobie, ktorá je daná vzorcom

$$d = \frac{i}{1 + in}.$$

1.1.2 Zložené úročenie

V prípade zloženého úročenia sa úrok pripisuje k istine postupne v každom období a v ďalších obdobiach sa znovu úročí. Budúcu hodnotu vypočítame podľa vzorca

$$FV = PV(1 + i)^n. \quad (1.2)$$

Aj pri zloženom úročení je možné vyjadriť proces diskontovania pomocou formuly

$$PV = FV(1 + i)^{-n} = FVv^n, \quad (1.3)$$

v sa nazýva diskontný faktor a je vyjadrený ako

$$v = \frac{1}{1 + i}.$$

1.1.3 Spojité úročenie

V mnohých prípadoch sa za dané časové obdobie istina úročí viackrát. Pre jednoduchosť zvolme časové obdobie 1 rok. Označme $i^{(p)}$ ako ročnú nominálnu úrokovú mieru s úročením p -krát ročne. p sa nazýva frekvencia úročenia a $\frac{i^{(p)}}{p}$ je potom nominálna úroková miera pre $\frac{1}{p}$ roka. Budúca hodnota istiny po n rokoch, pri úročení p -krát ročne, je daná vzorcom

$$FV = PV \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^{np}. \quad (1.4)$$

Spojité úročenie predstavuje prípad, keď sa frekvencia úročenia p blíži k nekonečnu. Nominálna úroková miera pre spojitý úročený sa nazýva intenzita úročenia a označuje sa δ . Budúca hodnota istiny v čase T sa vypočíta ako

$$FV = \lim_{p \rightarrow \infty} PV \left(1 + \frac{i^{(p)}}{p}\right)^{T \cdot p} = PV e^{\delta T}. \quad (1.5)$$

Pokiaľ v čase t , $0 \leq t \leq T$ uskutočníme vklad vo výške PV_t jeho hodnota v čase T pri spojitom úročení bude

$$FV = PV_t e^{\delta(T-t)}.$$

Proces diskontovania sa pri spojitom úročení vyjadrí vzorcom

$$PV_t = FV e^{-\delta(T-t)}.$$

1.2 Časová štruktúra úrokových mier

Úrokové miery nie sú pevné. V čase dochádza k ich neustálym zmenám. Okrem toho sa rozličnými úrokovými mierami reprezentujú aj rôzne doby splatnosti. Teoreticky by malo platiť: čím dlhšia je splatnosť úveru, tým väčšia by mala byť úroková sadzba pre tento úver. Časová štruktúra úrokových sadzieb predstavuje spôsob, akým sa mení výnos v závislosti na maturite. Tento vzťah sa obecné označuje ako výnosová krivka. V tejto časti si uvedieme základné typy úrokových mier z hľadiska časovej štruktúry. Uvedené informácie a definície pochádzajú z [1] a [4].

Definícia 1. $R(t, T)$ sa nazýva spotová úroková miera z času t do času T , $t < T$ ak platí

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1.6)$$

kde $P(t, T)$ je cena bezkupónového dlhopisu v čase t , ktorý vyplatí čiastku 1 v čase T .

Z rovnice (1.6) ľahko odvodíme vzorec pre spotovú mieru $R(t, T)$

$$R(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T - t}$$

a zaфіxovaním pevného t , môžeme skonštruovať výnosovú krivku. Značenie \log pre prirodzený logaritmus budeme používať v celej práci.

Spotová úroková miera predstavuje cenu pôžičky vždy na určité časové obdobie a je bežne pozorovaná na trhu. Ak si v čase t , požičiame na obdobie $(t, t + \Delta t)$, kde Δt je malý časový úsek, dostaneme

$$R(t, t + \Delta t) = -\frac{\log P(t, t + \Delta t)}{\Delta t}.$$

Limitným prechodom $\Delta t \rightarrow 0$ aproximujeme okamžitú spotovú úrokovú mieru.

Definícia 2. Okamžitá spotová úroková miera v čase t , $r(t)$, sa definuje ako

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} R(t, t + \Delta t). \quad (1.7)$$

Miera $r(t)$ predstavuje úrokovú mieru, za ktorú si požičiame, pokiaľ je pôžička splatená takmer ihneď. Je závislá len na jednom parametre, čase t . Napriek tomu, že nie je pozorovateľná na trhu, má veľký význam pri oceňovaní derivátov.

Ďalší typ úrokovej miery je forwardová úroková miera.

Definícia 3. Nech $t < T_1 < T_2$. Povieme, že $f(t, T_1, T_2)$ je forwardová úroková miera dohodnutá v čase t , na obdobie od T_1 do T_2 pokiaľ platí

$$e^{R(t, T_2)(T_2-t)} = e^{R(t, T_1)(T_1-t)} e^{f(t, T_1, T_2)(T_2-T_1)}. \quad (1.8)$$

Z rovnice (1.8) dostaneme implicitný vzťah pre forwardovú úrokovú mieru

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{R(t, T_2)(T_2 - t) - R(t, T_1)(T_1 - t)}{T_2 - T_1} = -\frac{\log P(t, T_2) - \log P(t, T_1)}{T_2 - T_1}$$

Rovnako ako pri spotovej úrokovej miere, označením $T_1 = T$, $T_2 = T + \Delta t$, kde Δt je malý časový úsek, máme

$$f(t, T, T + \Delta t) = -\frac{\log P(t, T + \Delta t) - \log P(t, T)}{\Delta t}$$

a zmenšovaním Δt získavame okamžitú forwardovú úrokovú mieru.

Definícia 4. Okamžitá forwardová úroková miera sa definuje ako

$$f(t, T) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} f(t, T, T + \Delta t). \quad (1.9)$$

$f(t, T)$ predstavuje v čase t okamžitú úrokovú mieru v čase T a je zrejmé, že $r(t) = f(t, t)$. Ďalej pre ňu platí vzťah

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} = R(t, T) + (T - t) \frac{\partial R(t, T)}{\partial T}. \quad (1.10)$$

Zafixovaním t , môžeme zostrojiť graf $f(t, T)$, ktorý nazývame forwardová výnosová krivka.

1.3 Finančné deriváty

Od 70. a 80. rokov 20. storočia sa finančné deriváty stali dôležitým nástrojom vo svete financií. Vznikli ako reakcia na neistotu vývoja cien finančných inštrumentov. Deriváty môžeme definovať ako finančné nástroje, ktorých hodnota závisí na hodnote iného podkladového aktíva. Majú podobu termínových kontraktov. Termínový kontrakt je dohoda, ktorá znamená právo resp. povinnosť prediť resp. kúpiť určité množstvo podkladového aktíva v dohodnutú dobu za dohodnutú cenu. Podrobnejšie informácie o finančných derivátoch môžeme nájsť v [3] a [8].

1.3.1 Forwardy

Medzi najjednoduchšie typy finančných derivátov patria forwardy. Sú to individuálne uzatvárané dohody na nákup alebo predaj určitého množstva podkladového aktíva vo vopred určenom budúcom čase za vopred určenú cenu. Realizujú sa na mimoburzových trhoch. Vo forwardovom kontrakte vystupujú dve strany, kupujúci a predávajúci podkladového aktíva. Strana, ktorá sa zaviazala kúpiť podkladové aktívum za zjednanú cenu v dohodnutom čase, je v dlhej pozícii (*long position*) a strana, ktorá má povinnosť ho za túto cenu v dohodnutom čase prediť, zaujíma krátku pozíciu (*short position*).

Forwardy sú charakterizované viacerými parametrami. Zjednaný dátum dodávky aktíva označujeme T , zjednanú cenu K . Skutočná cena podkladového aktíva v čase t , $t \leq T$ sa nazýva promptná alebo spotová cena a značí sa S_t . V čase splatnosti forwardu prinesie kontrakt účastníkovi v dlhej pozícii zisk $S_T - K$ a účastníkovi v krátkej pozícii zisk $K - S_T$.

Hodnota dlhej pozície v čase t , $t \leq T$ vyjadruje potenciálny okamžitý zisk, ktorý vyplýva z dlhej pozície a značí sa f_t . Pretože vstup do kontraktu je pre obe strany bezplatný, musí platiť, že hodnota dlhej pozície v čase zjednania je nulová $f_0 = 0$. V čase splatnosti je hodnota dlhej pozície $f_T = S_T - K$.

Ďalším parametrom, ktorý súvisí s forwardovými kontraktmi, je cena forwardu F_t v čase $t \leq T$. Je to taká cena podkladového aktíva, na ktorú by bolo v čase t nutné zmeniť pôvodnú cenu tohoto aktíva tak, aby $f_t = 0$. Špeciálne, v čase $t = 0$ je rovná zjednanej cene K , $F_0 = K$. Cena forwardu nie je cena, ktorú by kupujúci zaplatil za zakúpenie kontraktu v čase t , ale cena, ktorú zaplatí k

dátumu splatnosti za podkladové aktívum. Odvodzuje sa od spotovej ceny S_t s využitím spojitého úročenia podľa modelu

$$F_t = S_t e^{c(T-t)} = f_t e^{c(T-t)} + K \quad (1.11)$$

$$f_t = S_t - K e^{-c(T-t)}. \quad (1.12)$$

c má význam úrokovej sadzby a líši sa podľa typu podkladového aktíva.

1.3.2 Futures

Futures sú špeciálny prípad forwardov. Odlišnosť spočíva v tom, že sú vysoko štandardizované, takže ich ide uzavrieť len na určité typy podkladového aktíva, v stanovenom štandardizovanom čase a množstve. Uzatváranie kontraktov s futures a obchodovanie s nimi sa uskutočňuje na termínových burzách.

Štandardizácia forwardov na podobu futures má viaceré výhody. Zúčtovanie ziskov a strát sa deje každý obchodný deň a nie je nutné čakať do doby splatnosti obchodu. Štandardizácia tiež eliminuje riziko nedodržania zmluvných záväzkov protistranou a umožňuje účastníkovi odstúpiť od kontraktu v ľubovoľnom čase. Tieto výhody sa dosahujú pomocou denného vyrovnania ziskov a strát, kedy sa na účty subjektov pripíšu rozdiely medzi cenou futures na konci obchodného dňa a konci predchádzajúceho obchodného dňa. Ceny futures potrebné na vyrovnanie určuje clearingové centrum, ktoré tiež prerozdeľuje peniaze medzi ziskovými a stratovými stranami. Obchodujúce subjekty musia pri uzatváraní obchodu zložiť na účet počiatočnú maržu, pomocou ktorej sa clearingové stredisko istí.

Pretože futures je len špeciálna forma forwardov, platia pri ich oceňovaní tie isté princípy ako pri forwardových kontraktoch.

1.3.3 Opcie

Opcie sa líšia od prechádzajúcich dvoch typov finančných derivátov. Forwardy a futures patria medzi nepodmienené deriváty a oba subjekty sú povinné uskutočniť dohodnutý obchod. Na rozdiel od nich, opcie ako podmienené deriváty predstavujú kontrakty, v ktorých držiteľ opcie v dlhej (long) pozícii má právo uskutočniť vopred dohodnutý obchod a upisovateľ v krátkej (short) pozícii sa len pasívne podriaďuje rozhodnutiu držiteľa. Vstup do dlhej pozície preto nie je bezplatný a uskutočňuje sa kúpou opcie za opčnú prémii (cenu opcie). Držiteľ môže opciu uplatniť a skutočne kúpiť alebo prediť podkladové aktívum, môže ju prediť, čím vyrovná long pozíciu a zmení ju na short, alebo nechá opciu prepadnúť.

Rozlišujeme kúpne *call* opcie, ktorých držiteľ má právo kúpiť a upisovateľ prediť podkladové aktívum, a predajné *put* opcie, kedy má držiteľ právo na predaj a upisovateľ povinnosť na kúpu. Uskutočnenie obchodu sa nazýva realizácia alebo uplatnenie opcie a cena, za ktorú sa obchod realizuje je realizačná cena (*exercise price*) K . Dátum splatnosti (*maturity date*) opcie sa označuje T . Pokiaľ môže dôjsť k uplatneniu opcie len v čase splatnosti T , hovoríme o európskej opcii. Ak môže byť opcia realizovaná v ľubovoľnom čase do splatnosti t , $t \leq T$, nazýva sa americká opcia. Skutočná tržná cena podkladového aktíva S_t sa nazýva spotová alebo promptná cena.

Cenu opcie v čase t vyjadruje opčná prémia, za ktorú je opcia obchodovaná na burzových trhoch a dohadovaná na mimoburzových trhoch. Je daná ako súčet vnútornej a časovej hodnoty opcie

$$\text{opčná prémia} = \text{vnútorná hodnota opcie} + \text{časová hodnota opcie}$$

Vnútorná hodnota opcie v čase t , VH_t vyjadruje zisk z opcie v čase t pre držiteľa. V prípade call opcie sa matematicky vyjadrí ako

$$VH_t^C = \max(0, S_t - K)$$

a pre put opciu

$$VH_t^P = \max(0, K - S_t)$$

Na základe vnútornej hodnoty realizuje držiteľ opciu pokiaľ $VH_t > 0$, teda ak $S_t > K$ pre call opciu a $S_t < K$ pre put opciu. Opcia vtedy nesie pre long pozíciu zisk a hovoríme, že je v čase t v peniazoch (*in the money*). Naopak, pokiaľ nesie pre držiteľa stratu, je mimo peniaze (*out of the money*). Ak v čase t je $S_t = K$, je opcia na peniazoch (*at the money*).

Časová hodnota opcie v čase t , CH_t je odmena, ktorú by bol držiteľ opcie ochotný zaplatiť upisovateľovi za možnosť, že behom doby do splatnosti (t, T) vzrastie vnútorná hodnota opcie VH_t . Časová hodnota klesá s rastúcim časom t a $CH_T = 0$. Je ovplyňovaná mnohými faktormi, ktoré často nie je ľahké kvantifikovať, a pri jej výpočte je nutné postupovať aproximatívne.

2. Modely úrokových mier

V tejto kapitole si predstavíme najznámejšie modely okamžitej spotovej úrokovej miery r , ktoré majú významné praktické uplatnenie pri oceňovaní derivátov. Zameriame sa na jednofaktorové modely, kde vystupuje len jeden zdroj neistoty. Informácie o modeloch spracované v tejto časti pochádzajú z [4], [6] a [8]. Ich zovšeobecnenia a iné modely sa dajú nájsť v [1].

Modelovanie časovej štruktúry úrokových mier je založené na stochastickom kalkule. Na popis priebehu sa používajú náhodné procesy. Náhodným procesom nazývame systém náhodných veličín $X = \{X_t : t \in T\}$ definovaných na rovnakom pravdepodobnostnom priestore. Pokiaľ je množina T spojitým intervalom reálnych čísel, hovoríme o spojitom náhodnom procese. Na modelovanie úrokových mier sa najčastejšie využíva Wienerov proces.

Definícia 5. Wienerov proces $W = \{W_t : t \in [0, 1]\}$ je spojitý náhodný proces, ktorý spĺňa:

- (1) $W_0 = 0$ s pravdepodobnosťou 1.
- (2) W_t má nezávislé prírastky, to znamená: $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \leq 1$ sú $W_{t_2} - W_{t_1}$ a $W_{t_4} - W_{t_3}$ nezávislé náhodné veličiny.
- (3) $\forall 0 \leq s, t \leq 1$ platí, že rozdiel $W_t - W_s \sim N(0, |t - s|)$

Z definície 5 vidíme, že prírastky Wienerovho procesu za časový interval dĺžky Δt majú strednú hodnotu 0 a rozptyl Δt .

Pri limitnom prechode $\Delta t \rightarrow 0$ môžeme písať:

$$dW_t = \varepsilon \sqrt{dt}$$

kde ε je náhodná veličina z normovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$.

Všeobecný tvar jednofaktorových modelov úrokovej miery r je vyjadrený stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dW,$$

kde $\mu(r)$ označuje drift, $\sigma(r)$ difúzny koeficient a obe sú funkcie okamžitej spotovej úrokovej miery r . dt chápeme ako nekonečne malú zmenu času. Členy $\mu(r)$ a $\sigma(r)$ nie sú náhodné. Náhodu v modeli vyjadruje člen dW .

V niektorých prípadoch je možné stochastickú diferenciálnu rovnicu vyriešiť a zapísať proces úrokovej miery r v integrálnom tvare. Postup riešenia a integrálne tvary pre jednotlivé modely je možné nájsť napríklad v [1] a [8].

2.1 Rendlemanov-Bartterov model

Proces pre okamžitú spojitú úrokovú mieru r je daný rovnicou

$$dr = \mu r dt + \sigma r dW, \tag{2.1}$$

kde μ je reálna konštanta a σ kladná reálna konštanta.

Model predpokladá, že vývoj r je taký istý ako vývoj ceny akcie. Tento predpoklad nie je ideálny, pretože pri úrokových mierach sa uplatňuje vlastnosť *mean-reversion* - priťahovanie k dlhodobej hodnote, stredová návratnosť. To znamená,

že keď je r príliš vysoká, stredová návratnosť vedie k tomu, aby bol drift záporný a naopak keď je hodnota r nízka, zapríčiňuje kladný drift. Rendlemanov-Bartterov model tento jav nezahŕňa.

2.2 Vašíčkov model

Tento model popisuje vývoj r nasledujúcou rovnicou

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW, \quad (2.2)$$

kde $a > 0, b \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sú konštanty. Tieto parametre spolu s počiatočnou hodnotou r_0 plne charakterizujú dynamiku r .

Na rozdiel od predchádzajúceho modelu Vašíčkov model zahŕňa stredovú návratnosť. Parameter a vyjadruje jej rýchlosť. Úroveň stredovej návratnosti je určená parametrom b . Pokiaľ $r_t > b$, je drift záporný a zapríčiňuje pritiahnutie r_t na úroveň b mierou a . Naopak, ak $r_t < b$, bude drift kladný a r_t sa vráti mierou a na hodnotu b . Keďže v praxi sa záporné úrokové miery vyskytujú len zriedka, môžeme pridať predpoklad $b > 0$ a model tým príliš neobmedzíme. Z rovnakého dôvodu nie je veľmi obmedzujúci ani predpoklad $r_0 > 0$.

Explicitné vyjadrenie riešenia má tvar

$$r_t = r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u,$$

pre pevné $s < t$.

Nevýhodou Vašíčkovho modelu je to, že úroková sadzba r môže nadobúdať záporné hodnoty.

2.3 Coxov-Ingersollov-Rossov model

Coxov-Ingersollov-Rossov model predstavuje modifikáciu Vašíčkovho modelu tak, aby krátkodobá úroková miera mala len nezáporné hodnoty. Proces pre r je upravený do tvaru

$$dr = a(b - r)dt + \sigma \sqrt{r} dW, \quad (2.3)$$

kde $a > 0, b > 0, \sigma > 0$ sú konštanty. Podobne ako v predchádzajúcom modeli, môžeme pridať podmienku $r_0 > 0$.

Drift $a(b - r)$ je oproti Vašíčkovmu modelu nezmenený a zahŕňa rovnakú stredovú návratnosť. Zmena nastáva v difúznom koeficiente, ktorý už nie je nezávislý na r , ale je úmerný hodnote \sqrt{r} . To zabráňuje tomu, aby boli hodnoty r záporné pre ľubovoľné kladné hodnoty a a b . Pokiaľ r nadobúda hodnoty blízko nuly, difúzny koeficient je tiež malý a vo vývoji r sa stáva dominantným kladný drift, ktorý tlačí r smerom ku úrovni mean-reversion.

Nenulovosť úrokových mier je zaručená splnením podmienky $2ab \geq \sigma^2$.

2.4 Hoov-Leeov model

Nevýhodou predchádzajúcich troch modelov je, že parametre a, b, σ sú konštantné, nezávislé na čase t . Časová štruktúra úrokových sadzieb skonštruovaná týmito

modelmi väčšinou nezapadá do skutočnej štruktúry pozorovanej na trhu. Takisto ceny cenných papierov určené podľa týchto modelov sú odlišné od tržných cien. Tento problém riešia bezarbitrážne modely, ktoré nahradzujú konštantný drift driftom závislým na čase, využívajú forwardové sadzby, a sú preto konzistentné s aktuálnou časovou štruktúrou.

Hoov-Leeov model je prvý bezarbitrážny model. V roku 1986 ho Thomas So Yo Ho a Sang-Bin Lee publikovali v dokumente [7]. Úroková miera r sa v ňom riadi procesom

$$dr = \theta_t dt + \sigma dW, \quad (2.4)$$

kde σ je kladná konštanta a premenná θ_t je funkcia času t zvolená tak, aby model zodpovedal počiatočnej časovej štruktúre úrokových mier. Funkcia θ_t definuje priemerný smer, ktorým sa r zmení v čase t , je nezávislá na r a môže sa vypočítať analyticky. Analytický tvar θ_t je v [8] vyjadrený ako

$$\theta_t = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t \quad (2.5)$$

Forwardové sadzby $f(0, t)$ sú teda vstupom do tohto modelu a model fituje počiatočnú výnosovú krivku.

Vyriešením rovnice (2.5) získame rovnicu pre výpočet r v tvare

$$r_t = r_s + \int_s^t \theta_u du + \int_s^t \sigma dW_u.$$

2.5 Hullov-Whiteov model

Ďalším z bezarbitrážnych modelov je aj Hullov-Whiteov model. Publikovaný bol v roku 1990 v [9]. Tento model predstavuje kombináciu Vašíčkovho a Hoovho-Leeovho modelu. Definovaný je ako

$$dr = (\theta_t - ar)dt + \sigma dW \quad (2.6)$$

alebo

$$dr = a \left(\frac{\theta_t}{a} - r \right) dt + \sigma dW, \quad (2.7)$$

kde a , σ sú kladné konštanty a θ_t je funkcia odvodená z počiatočnej časovej štruktúry úrokových sadzieb. Formula na jej vyjadrenie má podľa [8] tvar

$$\theta_t = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}). \quad (2.8)$$

Hullov-Whiteov model môžeme charakterizovať ako Vašíčkov model so stredovou návratnosťou, ktorej hodnota je závislá na čase. Okamžitá spotová úroková miera r je v čase t priťahovaná na úroveň $\frac{\theta_t}{a}$ mierou a .

Z Hoovho-Leeovho modelu je v Hullovom-Whiteovom modeli čiastočne prevzatá štruktúra θ_t a jej závislosť na forwardových sadzbách. Hoov-Leeov model môžeme nazvať ako špecifický prípad Hullovho-Whiteovho modelu s nulovou hodnotou parametru a .

Vzťah pre úrokovú mieru r podľa Hullovho-Whiteovho modelu má tvar

$$r_t = e^{-a(t-s)}r_s + \int_s^t e^{-a(t-u)}\theta_u du + \int_s^t e^{-a(t-u)}\sigma dW_u.$$

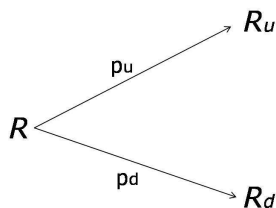
3. Stromy úrokových mier

V tejto kapitole si zavedieme pojmy binomický a trinomický strom úrokových mier, ich vlastnosti a konštrukciu. Stromy sa využívajú na modelovanie vývoja krátkodobých úrokových mier či cien akcií a predstavujú diskretnú aproximáciu spojitých modelov. Uplatňujú sa predovšetkým pri oceňovaní obligácií a finančných derivátov. Informácie využité v tejto kapitole sme čerpali hlavne z [3], [8] a [10].

3.1 Jednokrokový binomický strom

Ako prvý si predstavíme jednokrokový strom. Nech R je úroková miera pre krátky časový úsek dĺžky Δt . Binomický strom zobrazuje možné cesty vývoja úrokovej miery R a Δt reprezentuje dĺžku jedného kroku stromu.

Základným predpokladom modelu je, že počiatočná hodnota R sa za časové obdobie dĺžky Δt môže zmeniť na jednu z dvoch nových hodnôt. Buď vzrastie na hodnotu Ru , $u > 1$ alebo sa zníži na hodnotu Rd , $d < 1$. Pravdepodobnosť vzrastu je p a pravdepodobnosť poklesu je $1 - p$. Tento princíp vetvenia zobrazuje obrázok 3.1.



Obr. 3.1: Krok binomického stromu

Binomický strom predstavuje aproximáciu určitého spojitého modelu, preto pri jeho konštrukcii predpokladáme, že úroková miera R sa riadi tým istým stochastickým procesom ako okamžitá miera r v zodpovedajúcom spojitom modeli.

Konštrukciu si ukážeme pre spojitý jednofaktorový Rendlemanov-Bartterov model, ktorý je daný rovnicou

$$dr = \mu r dt + \sigma r dW$$

a podrobnejšie sme ho opísali v kapitole 2. Hodnoty u , d , a p nemôžeme zvoliť ľubovoľne. Určíme ich tak, aby stredná hodnota a rozptyl zmeny hodnoty R za čas Δt zodpovedali hodnotám v Rendlemanovom-Bartterovom modeli a strom tak dobre aproximoval tento model.

Stredná hodnota R na konci obdobia dĺžky Δt , označíme ju $E(R_{\Delta t})$, sa z jednokrokového binomického stromu rovná

$$E(R_{\Delta t}) = pRu + (1 - p)Rd.$$

Z Rendlemanovho-Bartterovho modelu určíme túto strednú hodnotu $E(R_{\Delta t})$ vyriešením diferenciálnej rovnice

$$dr = \mu r dt.$$

Integráciou cez interval $(0, \Delta t)$ získame strednú hodnotu

$$E(R_{\Delta t}) = Re^{\mu \Delta t}.$$

Aby bol strom dobrou aproximáciou modelu požadujeme, aby sa tieto stredné hodnoty rovnali. Dostávame rovnicu

$$pRu + (1 - p)Rd = Re^{\mu \Delta t}. \quad (3.1)$$

Rozptyl úrokovej miery R za časový interval Δt , $\text{var}(R_{\Delta t})$, určíme zo stromu podľa vzorca

$$\text{var}(Q) = E(Q^2) - (E Q)^2.$$

Dostaneme tak vzťah

$$\text{var}(R_{\Delta t}) = p(Ru)^2 + (1 - p)(Rd)^2 - [pRu + (1 - p)Rd]^2.$$

Rozptyl $\text{var}(R_{\Delta t})$ vypočítame aj z Rendlemanovho-Bartterovho modelu. Tento spojitý model môžeme diskkrétne zapísať ako

$$r_{t+\Delta t} - r_t = \mu r_t \Delta t + \sigma \epsilon_t \sqrt{\Delta t}, \quad (3.2)$$

kde ϵ je náhodná veličina z normovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$. Teda pre úrokovú mieru R a voľbu $t = 0$ platí

$$R_{\Delta t} - R = \mu R \Delta t + \sigma \epsilon R \sqrt{\Delta t}, \quad (3.3)$$

V rovnici (3.3) je náhoda modelu zachytená len v druhom člene. Rozptyl $\text{var}(R_{\Delta t})$ na konci obdobia Δt je preto rovný

$$\text{var}(R_{\Delta t}) = \sigma^2 R^2 \Delta t.$$

Získali sme dve vyjadrenia toho istého rozptylu a ich spojením dostávame rovnicu

$$p(Ru)^2 + (1 - p)(Rd)^2 - [pRu + (1 - p)Rd]^2 = \sigma^2 R^2 \Delta t. \quad (3.4)$$

K rovnostiam (3.1) a (3.4) pridáme ďalší predpoklad

$$d = \frac{1}{u}. \quad (3.5)$$

Tento predpoklad zaviedli v roku 1979 Cox, Ross a Rubinstein v [5]. Zabezpečuje, že strom je rekombinovaný, čiže vzrast a následný pokles úrokovej miery v druhom kroku dá tú istú hodnotu ako pokles a následný nárast miery.

Máme tri rovnice o troch neznámych. Vyriešením (3.1), (3.4) a (3.5) dostaneme vzťahy pre výpočet u , d a p

$$u = e^{\sigma \sqrt{\Delta t}} \quad (3.6)$$

$$d = e^{-\sigma \sqrt{\Delta t}} \quad (3.7)$$

$$p = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d} \quad (3.8)$$

3.2 Viackrokový binomický strom

V časti 3.1 sme predpokladali len jeden krok stromu a dve možnosti vývoja úrokovej miery R . Opakovaným použitím princípu jednokrokového stromu môžeme skonštruovať binomický strom s ľubovoľným počtom krokov. Predpokladáme kroky konštantnej dĺžky Δt . V každom uzle stromu hodnota R vzrastie resp. klesne s pravdepodobnosťou p resp. $1 - p$. Proporcionálny vzrast resp. pokles je v každom uzle rovnaký, vyjadrený hodnotami u resp. d . Uzly stromu si označíme indexmi (i, j) . $i \in N_0$ bude predstavovať počet krokov stromu, teda časové obdobie $t = i\Delta t$, j je počet pohybov R smerom nahor od počiatku stromu do času $i\Delta t$ a platí $0 \leq j \leq i$. R_{ij} bude označovať úrokovú mieru prislúchajúcu uzlu (i, j) , teda úrokovú mieru v čase $i\Delta t$ na obdobie $(i\Delta t, (i+1)\Delta t)$. Jej hodnota bude

$$R_{ij} = R_{00} u^j d^{i-j},$$

kde R_{00} je známa počiatočná hodnota úrokovej miery v čase 0.

Po i krokoch máme $(i+1)$ možných hodnôt úrokovej miery R . Vzťahy pre výpočet u , d a p sú rovnaké ako v predchádzajúcej časti pre jednokrokový strom.

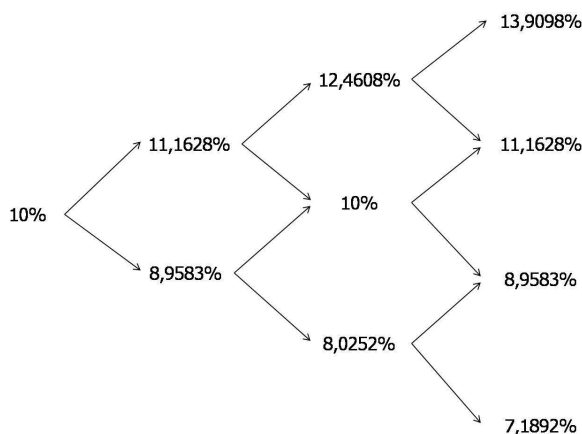
Príklad 3.2.1. Nech Δt predstavuje jeden rok a počiatočná hodnota spotovej úrokovej miery v čase 0 je 10 %. R sa riadi Rendlemanovým-Bartterovým modelom s hodnotami parametrov $\mu = 0,05$ a $\sigma = 0,11$ potom podľa (3.6), (3.7) a (3.8) dostaneme

$$u = e^{0,11\sqrt{1}} = 1,11628$$

$$d = e^{-0,11\sqrt{1}} = 0,895834$$

$$p = \frac{e^{0,05} - d}{u - d} = 0,705109$$

Príslušný trojkrokový strom je zobrazený na obrázku 3.2.



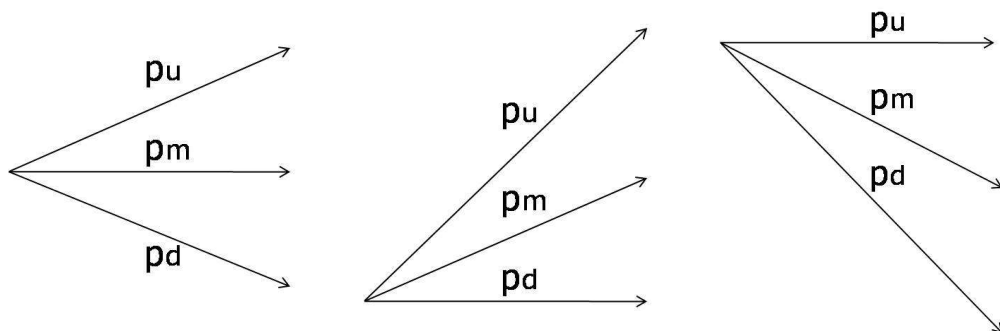
Obr. 3.2: Príklad trojkrokového stromu

3.3 Trinomický strom úrokových mier

Na modelovanie vývoja úrokových mier nie je použitie binomických stromov najvhodnejšou voľbou. Ako alternatíva sa využívajú trinomické stromy, ktoré zahŕňujú viaceré vlastnosti úrokových mier ako napríklad stredovú návratnosť.

Predpokladáme časové obdobia, resp. kroky stromu, s konštantnou dĺžkou Δt . R bude potom predstavovať úrokovú mieru pre časové obdobie dĺžky Δt .

V každom kroku stromu sa hodnota R môže vyvíjať troma spôsobmi s príslušnými pravdepodobnosťami. Zatiaľ čo v binomickom strome sme v uzloch stromu využívali jeden typ vetvenia, trinomický strom využíva tri rôzne typy. Štandardný typ vetvenia je zobrazený na obrázku 3.3. Hodnota R vzrastie na hodnotu Ru , nezmení sa alebo klesne na hodnotu Rd s pravdepodobnosťami p_u, p_m a p_d . Rastúci a klesajúci typ vetvenia zobrazujú obrázky 3.4 a 3.5. Rastúci typ vetvenia použijeme, pokiaľ sú úrokové miery na strome príliš malé a klesajúci typ vetvenia, pokiaľ sú príliš vysoké. Tieto vetvenia umožňujú trinomickému stromu reprezentovať stredovú návratnosť.



Obr. 3.3: Štandardný typ Obr. 3.4: Rastúci typ Obr. 3.5: Klesajúci typ

3.4 Konštrukcia trinomického stromu

V tejto časti si ukážeme postup konštrukcie trinomického stromu pre Hullov-Whiteov model. Postup pozostáva z dvoch fáz a bol navrhnutý matematikmi J. Hullom a A. Whiteom, ktorý tento postup publikovali v [8].

Uvažujeme časové intervaly konštantnej dĺžky Δt . Hullov-Whiteov model okamžitej úrokovej miery r sme si uviedli v kapitole 2, má tvar

$$dr = (\theta_t - ar)dt + \sigma dW.$$

Keďže predpokladáme, že úroková miera R pre interval Δt sa riadi rovnakým procesom ako r platí

$$dR = (\theta_t - aR)dt + \sigma dW.$$

Tento predpoklad je rozumný, ak dĺžka kroku ide k nule.

3.4.1 Prvá fáza konštrukcie

V prvej fáze konštrukcie vytvoríme strom pre pomocný proces R^* , ktorého počiatočná hodnota je 0 a riadi sa modelom

$$dR^* = -aR^*dt + \sigma dW, \quad (3.9)$$

kde a, σ sú kladné konštanty a W je Wienerov proces.

Diskrétnne sa tento proces zapíše ako

$$R_{(i+1)\Delta t}^* - R_{i\Delta t}^* = -aR_{i\Delta t}^*\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}, \quad (3.10)$$

kde ϵ je náhodná veličina s rozdelením $N(0,1)$. Tento proces je symetrický okolo nuly.

Z diskrétného zápisu (3.10) vidíme, že náhodná veličina $R_{(i+1)\Delta t}^* - R_{i\Delta t}^*$, ktorá vyjadruje zmenu hodnoty $R_{i\Delta t}^*$ za obdobie dĺžky Δt , má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $-aR_{i\Delta t}^*\Delta t$ a rozptylom $\sigma^2\Delta t$.

Rozdiel úrokových mier v uzloch stromu v rovnakom čase $i\Delta t$ si označíme ako ΔR . Tento rozdiel budeme predpokladať konštantný na celom strome a položíme ho rovný hodnote $\sigma\sqrt{3\Delta t}$, ktorá je doporučená v [8].

Jednotlivé uzly stromu označíme indexmi (i, j) , $i, j \in Z$. Uzol (i, j) definujeme ako vrchol, v ktorom čas $t = i\Delta t$ a $R^* = j\Delta R$. i teda značí počet období od začiatku stromu a j hladinu stromu.

Pri konštrukcii stromu pre R^* je dôležité určiť, aký typ vetvenia pre daný vrchol stromu použijeme a následne vypočítať príslušné pravdepodobnosti p_u, p_m a p_d . Vetvenie musíme v uzloch voliť tak, aby tieto pravdepodobnosti boli kladné. Vo väčšine uzloch použijeme štandardné vetvenie. Klesajúce vetvenie použijeme pre príliš veľké hodnoty j . Naopak, pre malé hodnoty j , aplikujeme rastúce vetvenie. Aby sme mohli určiť, kedy nastane zmena typu vetvenia, zdefinujeme si nové premenné j_{max} a j_{min} . j_{max} bude označovať takú hodnotu j , pri ktorej štandardné vetvenie zmeníme na klesajúci typ vetvenia a j_{min} hodnotu j , pri ktorej štandardný typ zmeníme na rastúci. Podľa [8] sú pravdepodobnosti p_u, p_m a p_d vždy kladné, ak volíme j_{max} ako najmenšie celé číslo väčšie ako $\frac{0,184}{a\Delta t}$, teda

$$j_{max} = \min_{j \in Z} \left\{ j > \frac{0,184}{a\Delta t} \right\}$$

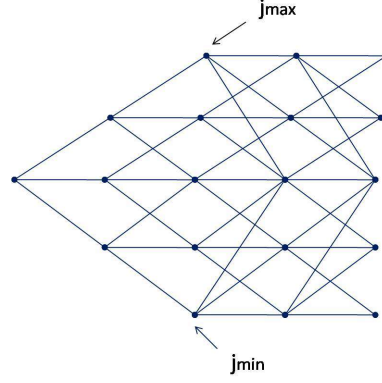
a aby bola zachovaná symetria stromu je

$$j_{min} = -j_{max}.$$

Zmena typu vetvenia je zobrazená na obrázku 3.6.

Po správnom zvolení typu vetvenia, potrebujeme vypočítať príslušné pravdepodobnosti p_u, p_m, p_d každej vetvy. p_u predstavuje pravdepodobnosť pre najvyššiu vetvu vychádzajúcu z daného uzla, p_m pre strednú a p_d pre najnižšiu vetvu. Ukazujú to aj obrázky 3.3, 3.4 a 3.5.

Pravdepodobnosti volíme tak, aby stredná hodnota a rozptyl náhodnej veličiny $R_{(i+1)\Delta t}^* - R_{i\Delta t}^*$ určené zo stromu boli rovnaké ako stredná hodnota a rozptyl tej istej veličiny určené zo spojitého procesu (3.9) pre R^* . Taktiež musí platiť, že súčet pravdepodobností p_u, p_m, p_d je rovný jednej. Takto dostaneme v každom uzle stromu, pre každý typ vetvenia tri rovnice o troch neznámych p_u, p_m, p_d .



Obr. 3.6: Zmena typu vetvenia

Ukážeme si odvodenie rovníc pre uzol (i, j) a štandardný typ vetvenia. Hodnota R^* v tomto vrchole je rovná $R^* = j\Delta R = j\sigma\sqrt{3\Delta t}$ a za čas Δt - jeden krok stromu, sa môže zmeniť na jednu z troch hodnôt. Zvýši sa na hodnotu $(j+1)\Delta R$, nezmení sa alebo sa zníži na $(j-1)\Delta R$ s príslušnými pravdepodobnosťami. Hodnota zmeny R^* za čas Δt je potom ΔR s pravdepodobnosťou p_u , 0 s pravdepodobnosťou p_m a $-\Delta R$ s pravdepodobnosťou p_d .

Stredná hodnota tejto zmeny sa preto zo stromu vypočíta ako

$$p_u\Delta R + p_m 0 + p_d(-\Delta R).$$

Strednú hodnotu zmeny vyjadrenú zo spojitého modelu (3.9) sme určili vyššie a v uzle (i, j) je rovná $-aj\Delta R\Delta t$.

Požadujeme, aby sa tieto stredné hodnoty zhodovali a dostávame tak rovnicu

$$p_u\Delta R - p_d\Delta R = -aj\Delta R\Delta t. \quad (3.11)$$

Rozptyl zmeny R^* za čas Δt určíme zo stromu podľa vzorca

$$\text{var}(Q) = E(Q^2) - (E Q)^2.$$

Je preto rovný hodnote

$$p_u(\Delta R)^2 + p_d(-\Delta R)^2 - (p_u\Delta R - p_d\Delta R)^2,$$

a použitím (3.11) upravíme vyjadrenie rozptylu na tvar

$$p_u(\Delta R)^2 + p_d(-\Delta R)^2 - (-aj\Delta R\Delta t)^2.$$

Zo spojitého modelu má rozptyl hodnotu $\sigma^2\Delta t$. Z požiadavky rovnosti oboch rozptylov a dostávame druhú rovnicu

$$p_u(\Delta R)^2 + p_d(-\Delta R)^2 - (aj\Delta R\Delta t)^2 = \sigma^2\Delta t. \quad (3.12)$$

Pridaním podmienky, že súčet pravdepodobností p_u , p_m , p_d je rovný jednej, ku rovniciam (3.11) a (3.12) dostávame sústavu troch rovníc o troch neznámych

$$\begin{aligned} p_u\Delta R - p_d\Delta R &= -aj\Delta R\Delta t \\ p_u(\Delta R)^2 + p_d(\Delta R)^2 &= \sigma^2\Delta t + a^2j^2(\Delta R)^2(\Delta t)^2 \\ p_u + p_m + p_d &= 1 \end{aligned}$$

Dosadením hodnoty $\sigma\sqrt{3\Delta t}$ za ΔR a vyriešením tejto sústavy troch rovníc dostávame

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 (\Delta t)^2 - aj\Delta t}{2} \quad (3.13)$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2 j^2 (\Delta t)^2 \quad (3.14)$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 (\Delta t)^2 + aj\Delta t}{2} \quad (3.15)$$

Analogickým postupom vytvoríme sústavu rovnice pre rastúce vetvenie a získame riešenia

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 (\Delta t)^2 + aj\Delta t}{2} \quad (3.16)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 (\Delta t)^2 - 2aj\Delta t \quad (3.17)$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 (\Delta t)^2 + 3aj\Delta t}{2} \quad (3.18)$$

a pre klesajúci typ vetvenia majú riešenia tvar

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{a^2 j^2 (\Delta t)^2 - 3aj\Delta t}{2} \quad (3.19)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 (\Delta t)^2 + 2aj\Delta t \quad (3.20)$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{a^2 j^2 (\Delta t)^2 - aj\Delta t}{2} \quad (3.21)$$

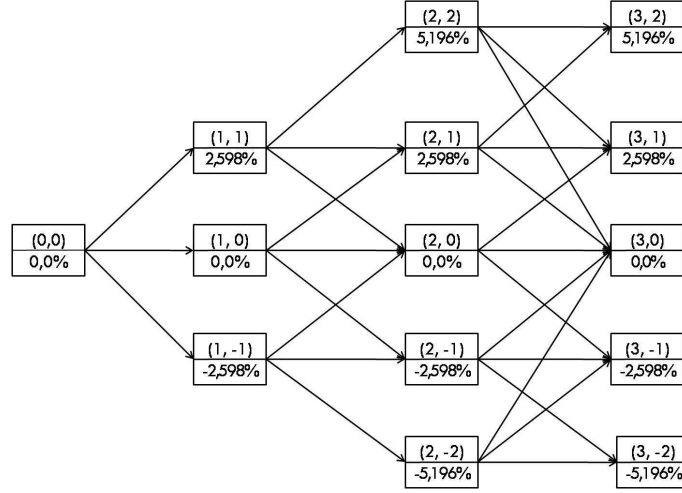
Príklad 3.4.1. Prvú fázu môžeme ilustrovať na príklade. Zvolíme $\sigma = 0,015$ a $a = 0,1$. Zostrojíme trojkrovový trinomický strom pre R^* . Dĺžku jedného kroku Δt volíme 1 rok.

Pre takúto voľbu σ, a a Δt je $\Delta R = 0,02598$. j_{max} je najmenšie celé číslo väčšie ako 1,84. Teda $j_{max} = 2$ a $j_{min} = -2$ a štandardný typ vetvenia budeme meniť v uzloch $(i, 2)$ resp. $(i, -2)$, $i \in N$ a $i > 1$. Hodnota R^* je v uzle (i, j) rovná $R^* = j\Delta R$.

Príslušné pravdepodobnosti v uzloch so štandardným typom vetvenia vypočítame podľa vyššie uvedených vzorcov (3.13), (3.14) a (3.15). V uzloch s rastúcim resp. klesajúcim typom vetvenia použijeme rovnice (3.16), (3.17), (3.18) resp. (3.19), (3.20), (3.21). Tieto pravdepodobnosti nezávisia na čase i , ale len na hladine stromu j . Výsledný strom je symetrický a zobrazuje ho obrázok 3.7. Na strome označuje vrchná hodnota uzol a spodná hodnotu R^* prisluchajúcu danému uzlu. Príslušné pravdepodobnosti p_u, p_m, p_d sú pre každý uzol stromu uvedené v tabuľke 3.1.

3.4.2 Druhá fáza konštrukcie

V druhej fáze konštrukcie trinomického stromu zmeníme strom pre R^* , ktorý sme vytvorili v prvej fáze, tak, aby sme dostali strom pre pôvodnú úrokovú mieru R . Pravdepodobnosti jednotlivých vetví ostávajú nezmenené.



Obr. 3.7: Trinomický strom pre R^*

uzol	p_u	p_m	p_d
(0, 0)	0,1667	0,6666	0,1667
(1, 1)	0,1217	0,6566	0,2217
(1, 0)	0,1667	0,6666	0,1667
(1, -1)	0,2217	0,6566	0,1217
(2, 2)	0,0867	0,0266	0,0867
(2, 1)	0,1217	0,6566	0,2217
(2, 0)	0,1667	0,6666	0,1667
(2, -1)	0,2217	0,6566	0,1217
(2, -2)	0,0867	0,0266	0,8867

Tabuľka 3.1: Príslušné hodnoty pravdepodobností pre uzly

Zadefinujeme si proces α ako rozdiel R a R^*

$$\alpha = R - R^* \quad (3.22)$$

Zo vzťahov

$$dR = (\theta_t - aR)dt + \sigma dW$$

$$dR^* = -aR^*dt + \sigma dW$$

vyjadrujúcich procesy, ktorými sa riadia R a R^* , získame vyjadrenie procesu pre α

$$d\alpha = (\theta_t - a\alpha)dt. \quad (3.23)$$

Podľa [8] môžeme vypočítať analytické vyjadrenie α_t , ktoré má tvar

$$\alpha_t = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \quad (3.24)$$

Jednou z možností, ako získať trinomický strom pre R zo stromu pre R^* je, že k známym hodnotám R_t^* v časoch $t = i\Delta t$ pripočítame hodnoty α_t získané z (3.24).

Iný postup na konštrukciu stromu pre úrokovú mieru R je iteratívny postup. Definiujeme si α_i ako $\alpha_{i\Delta t}$

$$\alpha_i := \alpha_{i\Delta t} = R_{i\Delta t} - R_{i\Delta t}^*$$

$Q_{i,j}$ definujeme ako súčasnú hodnotu cenného papiera, ktorý vypláca jednu peňažnú jednotku, ak sa nachádzame v uzle (i, j) a inak vypláca 0. P_m bude značiť cenu bezkupónového dlhopisu podľa počiatočnej časovej štruktúry úrokových mier s maturitou v čase $m\Delta t$.

Hodnoty $Q_{i,j}$ a α_i počítame rekurzívne. Je zrejmé, že $Q_{0,0} = 1$. Predpokladajme, že poznáme $Q_{i,j}$ pre $i \leq m$, $m \geq 0$, teda aj hodnoty α_i pre $i = 0, \dots, m-1$. Potrebujeme určiť α_m . Hodnotu α_m vyjadríme tak, aby strom správne oceňoval bezkupónový dlhopis s maturitou v čase $(m+1)\Delta t$. V uzle (m, j) je hodnota R^* rovná $j\Delta R$. Hodnota úrokovej miery R je v tomto uzle $\alpha_m + j\Delta R$. Pre cenu bezkupónového dlhopisu musí preto platiť

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t]. \quad (3.25)$$

n_m značí počet uzlov na oboch stranách od centrálného uzlu v čase $m\Delta t$. α_m vyjadríme z rovnice (3.25) ako

$$\alpha_m = \frac{\log \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp(-j\Delta R\Delta t) - \log P_{m+1}}{\Delta t} \quad (3.26)$$

Získame tak $(2n_m + 1)$ hodnôt úrokovej miery R v čase $m\Delta t$ pre uzly (m, j) , $j = -n_m, \dots, n_m$.

Dalej vyjadríme hodnotu $Q_{m+1,j}$. Vzorec pre výpočet má tvar

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t]. \quad (3.27)$$

$q(k, j)$ je pravdepodobnosť, že sa z uzlu (m, k) presunieme do uzlu $(m+1, j)$. Suma v (3.27) prebieha cez všetky také k , že pravdepodobnosť $q(k, j)$ je väčšia ako nula.

Príklad 3.4.2. Na ilustrovanie druhej fázy predpokladáme rovnaké hodnoty σ , a a Δt ako v príklade 3.4.1 a trojkrovový strom pre úrokovú mieru R^* , ktorý sme v ňom vytvorili. Predpokladáme, že máme súčasné úrokové miery pre bezkupónové dlhopisy s rôznymi dobami splatnosti. Uvedené sú v tabuľke 3.2.

Platí, že $Q_{0,0} = 1$. Ako prvú určíme hodnotu α_0 . Cena dlhopisu s maturitou 1 rok je podľa tabuľky 3.2 rovná $P_1 = e^{-0,03824}$. Dosadením do (3.26) dostaneme $\alpha_0 = 0,03824$ a to je tiež hodnota úrokovej miery R v uzle $(0, 0)$.

Dalej spočítame hodnoty $Q_{1,1}$, $Q_{1,0}$ a $Q_{1,-1}$. Do uzlu $(1, 1)$ sa s kladnou pravdepodobnosťou môžeme dostať len z uzlu $(0, 0)$. Táto pravdepodobnosť $q(0, 1)$ má hodnotu 0,1667. Preto podľa (3.27)

$$Q_{1,1} = 0,1667e^{-0,03824} = 0,1604$$

a analogicky

$$Q_{1,0} = 0,6666e^{-0,03824} = 0,6417$$

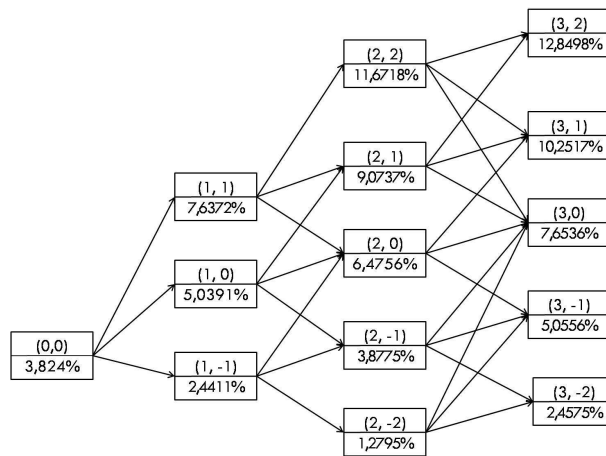
$$Q_{1,-1} = 0,1667e^{-0,03824} = 0,1604$$

Počiatočná úroková miera pre dlhopis s maturitou dva roky je 0,04425, a preto $P_2 = e^{-0,04425 \cdot 2} = 0,915303$. Dosadením do (3.26) dostaneme

$$\alpha_1 = 0,0504$$

a máme hodnoty R v čase 1 rok.

Podľa vzorcov (3.27) a (3.26) ďalej počítame hodnoty $Q_{2,j}, j = -2, \dots, 2$ a dostaneme $\alpha_2 = 0,0648$. Následne spočítame $Q_{3,j}, j = -2, \dots, 2$ a $\alpha_3 = 0,07654$. Získame trojkrový strom pre úrokovú mieru R . Tento strom už nie je symetrický. Zobrazený je na obrázku 3.8. Vrchná hodnota značí uzol a spodná príslušnú hodnotu R . Pravdepodobnosti p_u, p_m, p_d prislúchajúce jednotlivým uzlom sú rovnaké ako uvádza tabuľka 3.1 pre strom pre R^* .



Obr. 3.8: Trinomický strom pre R

maturita (v rokoch)	úroková miera (v %)
1	3,824
2	4,425
3	5,095
4	5,714

Tabuľka 3.2: Počiatočné úrokové miery

3.4.3 Rozšírenie na iné modely

Postup konštrukcie trinomického stromu môžeme rozšíriť a použiť na modely úrokovej miery r v tvare

$$df(r) = (\theta_t - af(r))dt + \sigma dW, \quad (3.28)$$

kde a, σ sú kladné konštanty. f je funkcia, ku ktorej existuje inverzná funkcia. Znovu predpokladáme konštantné kroky dĺžky Δt . R sa riadi rovnakým procesom ako r

$$df(R) = (\theta_t - af(R))dt + \sigma dW.$$

Označíme si $x := f(R)$ a platí

$$dx = (\theta_t - ax)dt + \sigma dW.$$

Proces x sa riadi Hullovým-Whiteovým modelom a strom pre x budujeme v dvoch fázach.

V prvej fáze vytvoríme strom pre proces x^* , ktorého počiatočná hodnota je 0 a riadi sa modelom

$$dx_t^* = -ax_t^*dt + \sigma dW_t.$$

Vertikálnu vzdialenosť medzi uzlami v rovnakom čase označíme Δx . Táto fáza je indetická s prvou fázou pre Hullov-Whiteov model, ktorú sme opísali v časti 3.4.1.

V druhej fáze upravíme strom pre x^* na strom pre úrokovú mieru $x = f(R)$. K hodnotám x_t^* v uzloch v čase $t = i\Delta t$, $i \in N_0$ pripočítame hodnoty α_i ktoré definujeme ako rozdiel $x_{i\Delta t}$ a $x_{i\Delta t}^*$. Nech g je inverzná funkcia ku f . Značenie ostatných premenných ponecháme rovnaké ako v časti 3.4.2.

Vzťahy pre výpočet $Q_{i,j}$ a α_i sa už budú odlišovať od vzťahov (3.25) a (3.27) pre prípad Hullovho-Whiteovho modelu. Nech poznáme $Q_{i,j}$ pre $i \leq m$, $m \geq 0$. Na výpočet α_m použijeme nasledujúci vzťah

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-g(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t]. \quad (3.29)$$

Táto rovnica sa počíta numerickými metódami. Po vyjadrení α_m určíme $Q_{i,j}$ použitím vzorca, ktorý má tvar

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) \exp[-g(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t]. \quad (3.30)$$

Najčastejšie sa ako funkcia f volí prirodzený logaritmus. Takýto model má výhodu v tom, že úrokové miery sú v ňom vždy kladné.

3.5 Oceňovanie opcií

V predchádzajúcej sekcii 3.4 sme skonštruovali stromy úrokových mier. Teraz si ukážeme ako sa používajú na oceňovanie. Budeme oceňovať opcie na dané podkladové aktívum.

Nech T značí dátum splatnosti opcie. Jej realizačná cena je K . Chceme získať cenu opcie v čase 0 - počiatočnú cenu. Začneme s tým, že interval životnosti opcie $(0, T)$ si rozdelíme na n intervalov konštantnej dĺžky Δt . R bude úroková miera pre časový interval tejto dĺžky. Predpokladáme, že sa riadi nejakým procesom tvaru (3.28). Podľa postupu z časti 3.4 zostrojíme n -krokový trinomický strom pre R s konštantnou dĺžkou kroku Δt . $R_{i,j}$ bude úroková miera v uzle (i, j) , $i = 0, 1, \dots, n$, $j = -n_i, \dots, n_i$ na obdobie $(i\Delta t, (i+1)\Delta t)$. n_i je počet uzlov na oboch stranách od centrálného uzlu v kroku i .

Aby sme mohli oceniť opciu, musíme ako prvé určiť ceny podkladového aktíva v jednotlivých uzloch. Označíme si $V_{i,j}$ ako cenu podkladového aktíva v uzle (i, j) . V koncových uzloch v čase $T = n\Delta t$ určíme ceny $V_{n,j}$ podľa toho o aký druh podkladového aktíva sa jedná. Hlbšie informácie o možnostiach ocenenia sa dajú

nájsť napríklad v [2], [3] a [8]. Pokiaľ budeme oceňovať európsky typ opcie, stačí nám určiť ceny podkladového aktíva len v koncových uzloch v čase maturity opcie, pretože realizácia pred dobou splatnosti nie je možná. Pre ocenenie americkej opcie potrebujeme ceny podkladového aktíva aj v ostatných uzloch. Určíme ich spätným prechodom stromu. Vo vrcholoch (i, j) $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = -n_i, \dots, n_i$ vypočítame ceny $V_{i,j}$ ako diskontovanú strednú hodnotu ceny v ďalšom kroku podľa vzorca

$$V_{i,j} = \left(\sum_k q(k, j) V_{i+1, j+k} \right) e^{-(R_{i,j} \Delta t)}. \quad (3.31)$$

$q(k, j)$ je pravdepodobnosť, že sa z uzlu (i, k) presunieme do uzlu $(i+1, k+j)$ a suma prebieha cez všetky také k , že pravdepodobnosť $q(k, j)$ je nenulová.

Po priradení hodnoty podkladového aktíva do uzlov stromu, môžeme oceňovať opciu. Cenu opcie v uzle (i, j) označíme $f_{i,j}$. Rovnako ako pri cenách podkladového aktíva, postupujeme spätným prechodom stromu. Cenu opcie vyjadruje opčná prémie, ktorá je známa v čase splatnosti opcie T . Vieme ju preto určiť vo všetkých koncových uzloch (n, j) , $j = -n_n, \dots, n_n$. Pre put opciu je daná vzťahom

$$f_{n,j} = \max \{0, K - V_{n,j}\}$$

a pre call opciu je

$$f_{n,j} = \max \{0, V_{n,j} - K\}.$$

V uzloch pred časom T určíme ceny opcie podobne ako sme určili ceny podkladového aktíva. Pre európsky typ opcie má vzorec na výpočet jej ceny v uzloch (i, j) $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = -n_i, \dots, n_i$ tvar

$$f_{i,j} = \left(\sum_k q(k, j) f_{i+1, j+k} \right) e^{-(R_{i,j} \Delta t)}. \quad (3.32)$$

Pokiaľ uvažujeme americký typ opcie, a teda možné zrealizovanie pred časom splatnosti T , použijeme pre americkú put opciu vzorec

$$f_{i,j} = \max \{K - V_{i,j}, \left(\sum_k q(k, j) f_{i+1, j+k} \right) e^{-(R_{i,j} \Delta t)}\}. \quad (3.33)$$

V prípade americkej call opcie zmeníme v (3.33) výraz $K - V_{i,j}$ na $V_{i,j} - K$. Premenné $q(k, j)$ a k v (3.32) a (3.33) značia to isté ako vo vzorci (3.31).

Cenu opcie v počiatočnom čase, ktorú sme chceli získať, vyjadruje $f_{0,0}$. S rastúcim počtom krokov stromu n , resp. s klesajúcou dĺžkou intervalu Δt , je cena opcie určená zo stromu presnejšia.

3.6 Oceňovanie peňažných tokov

Stromy úrokových mier sa využívajú aj pri oceňovaní peňažných tokov, ktorých hodnota závisí na budúcom vývoji úrokových sadzieb. Na oceňovanie sa používajú scenáre, ktoré sa získajú zo stromov. Za scenár vývoja úrokových mier sa považuje cesta z počiatočného do jedného z koncových uzlov stromu.

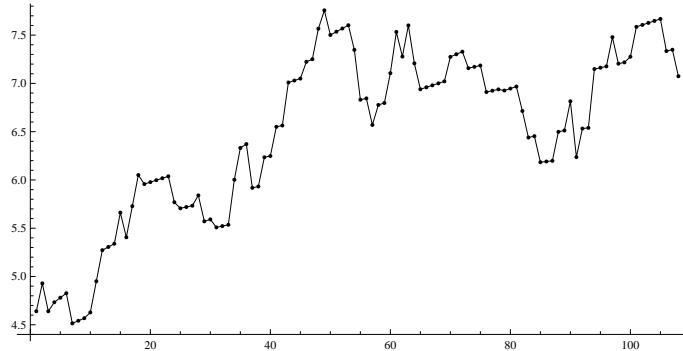
Nech CF_t , $t = 0, \dots, n$ značí diskrétny peňažný tok, CF_t je výška platby v čase t . Jeho súčasnú hodnotu určíme diskontovaním všetkých budúcich platieb. Predpokladáme, že časové intervaly medzi dvoma po sebe idúcimi platbami majú konštantnú dĺžku, ktorú označíme Δt .

Ako prvý sa vytvorí strom úrokových mier s dĺžkou kroku Δt a počtom krokov n . Postup konštrukcie je uvedený v časti 3.4. Strom nám modeluje budúci vývoj úrokových sadzieb, na ktorom závisí cena toku. Používa sa hlavne trinomický strom, ktorý zahŕňa stredovú návratnosť.

Zo skonštruovaného stromu generujeme scenáre vývoja úrokových mier. Počet všetkých možných scenárov je pre strom s veľkým počtom krokov vysoký, preto generujeme len určitý počet K scenárov. V praxi sa počet scenárov K určuje odborníkom. K musí byť dostatočne veľké, aby výsledná cena finančného toku bola dostatočne blízko cene, ktorú by sme získali pomocou všetkých možných scenárov. Zvolený počet scenárov K nesmie byť príliš vysoký, aby nebol výpočet hodnoty finančného toku časovo náročný.

Pri generovaní scenárov začneme v počiatočnom uzle stromu. V každom uzle sa presunieme do ďalšieho náhodne s príslušnými pravdepodobnosťami stromu, až kým sa nedostaneme do jedného z koncových uzlov.

Ukážka jedného scenára je aj na obrázku 3.9. Scenár je vygenerovaný zo 108-krokového trinomického stromu pre Hullov-Whiteov model s parametrami $a = 0,1$, $\sigma = 0,01$. Na vodorovnej osi sú uvedené počty krokov, na zvislej osi hodnoty úrokovej miery v percentách.



Obr. 3.9: Scenár vývoja úrokových mier

Každý z vygenerovaných scenárov obsahuje $n + 1$ úrokových mier. Označíme ${}^k r_i$ úrokovú mieru platnú v období $(i\Delta t, (i + 1)\Delta t)$ pre scenár k , $k = 1, \dots, K$. Máme teda $\{{}^k r_i\}_{k=1}^K$ úrokových mier.

Označíme ${}^k PV$ ako súčasnú hodnotu peňažného toku CF_t , pri ktorej výpočte sme použili úrokové miery zo scenára k . Pokiaľ úročíme zložene, použijeme na výpočet ${}^k PV$ nasledujúci vzorec

$${}^k PV = CF_0 + \sum_{i=1}^n CF_i \prod_{j=0}^{i-1} (1 + {}^k r_j)^{-1}. \quad (3.34)$$

Pre spojitú úročenie použijeme vzťah

$${}^k PV = CF_0 + \sum_{i=1}^n CF_i \exp \left(- \sum_{j=0}^{i-1} {}^k r_j \Delta t \right). \quad (3.35)$$

Súčasnú hodnotu kPV určíme podľa vzťahu (3.34) resp. (3.35) pre každý scenár $k = 1, \dots, K$ a získame tak K hodnôt peňažného toku CF_t . Výslednú cenu PV , ktorú sme chceli získať, stanovíme ako priemer týchto hodnôt

$$PV = \frac{\sum_{k=1}^K {}^kPV}{K}. \quad (3.36)$$

4. Aplikácia úrokových stromov

V tejto časti aplikujeme binomický a trinomický strom na ocenenie opcie na dlhopis, ktorej parametre si vopred určíme. Konštrukciu stromu a následne ocenenie prevedieme podľa postupu z kapitoly 3. Využijeme matematický software Wolfram Mathematica. Program môžeme nájsť v prílohe na CD. Počet krokov jednotlivých stromov budeme postupne zväčšovať a sledovať ako sa so zmenou počtu krokov zmení cena opcie.

Uvažujeme európsku call opciu s maturitou 3 roky a realizačnou cenou 65 €. Podkladovým aktívom je bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou 100 € a dobou splatnosti 3 roky. K dispozícii máme počiatočnú časovú štruktúru úrokových mier pre bezkupónové dlhopisy s rôznou dobou splatnosti. Zobrazená je v tabuľke 4.1, maturita je v mesiacoch a úroková miera v %. Pre doby splatností medzi dvoma mesiacmi používame vážený priemer úrokových mier pre najbližšiu vyššiu a najbližšiu nižšiu maturitu, ktorú máme k dispozícii. Mesiace chápeme s počtom dní 30 a roky s počtom 360 dní.

maturita	úroková miera	maturita	úroková miera
1	4,64%	19	5,32%
2	4,71%	20	5,35%
3	4,75%	21	5,40%
4	4,80%	22	5,43%
5	4,85%	23	5,46%
6	4,90%	24	5,50%
7	4,93%	25	5,52%
8	4,96%	26	5,54%
9	4,98%	27	5,57%
10	5,01%	28	5,59%
11	5,03%	29	5,60%
12	5,09%	30	5,62%
13	5,11%	31	5,63%
14	5,13%	32	5,65%
15	5,16%	33	5,67%
16	5,20%	34	5,70%
17	5,25%	35	5,73%
18	5,03%	36	5,75%

Tabuľka 4.1: Počiatočná časová štruktúra úrokových mier

Stromy skonštruujeme do doby splatnosti opcie, ich dĺžka teda bude 3 roky. Ako prvý použijeme na ocenenie trinomický strom. Predpokladáme, že úrokové miery sa riadia Hullovým-Whiteovým modelom (2.6). Parametre modelu a a σ volíme nasledovne

$$a = 0,1$$

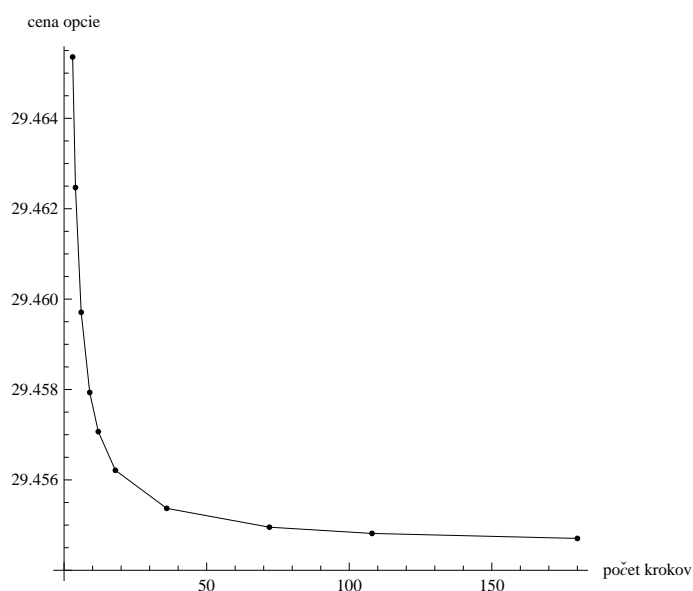
$$\sigma = 0,01.$$

Začneme s trojkrokovým stromom a dĺžka jedného kroku bude jeden rok (360 dní). Podľa postupu, ktorý sme uviedli v časti 3.4, vytvoríme trinomický strom. Oceňujeme európsky typ opcie, preto nám stačí určiť ceny podkladového aktíva resp. dlhopisu v koncových uzloch v čase 3 roky. Maturita dlhopisu je práve tri roky, preto je jeho cena v koncových uzloch rovná jeho nominálnej hodnote.

Opciu následne oceníme podľa vzorca (3.32). Počet krokov postupne zvyšujeme a sledujeme ako je príslušným stromom ocenená opcia. Získané výsledky sú uvedené v tabuľke 4.2. Závislosť ceny opcie určenej zo stromu na počte jeho krokov zobrazuje aj graf na obrázku 4.1. Vidíme, že rozdiely medzi cenami sa so zvyšujúcim počtom krokov znižujú.

počet krokov	dĺžka kroku	cena opcie v €
3	1 rok	29,4654
4	9 mesiacov	29,4625
6	6 mesiacov	29,4597
9	4 mesiace	29,4579
12	3 mesiace	29,4571
18	2 mesiace	29,4562
36	1 mesiac	29,4554
72	15 dní	29,4550
108	10 dní	29,4548
180	6 dní	29,4547

Tabuľka 4.2: Ceny opcie pre rôzny počet krokov trinomického stromu



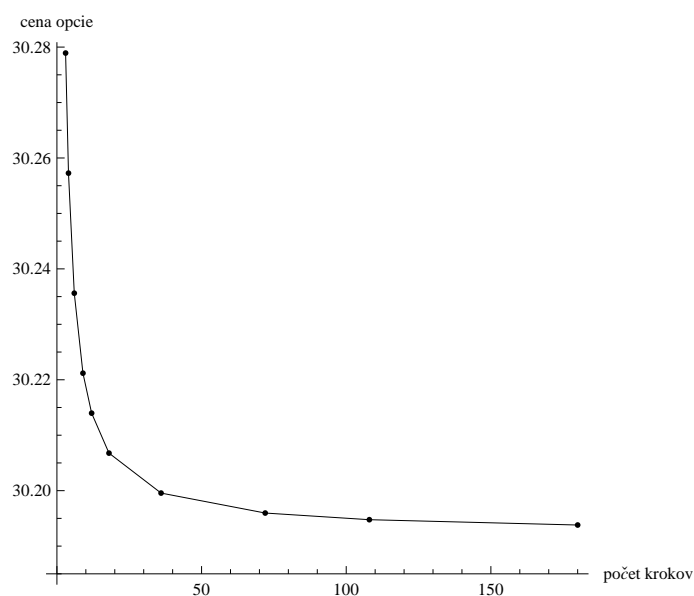
Obr. 4.1: Ceny opcie v závislosti na počte krokov trinomického stromu

Na ocenenie opcie ďalej využijeme aj binomický strom. Predpokladáme, že proces pre úrokové miery sa riadi Rendlemanovým-Bartterovým modelom (2.1). Hodnoty parametrov volíme $\mu = 0,04$ a $\sigma = 0,11$. Počiatočná hodnota v uzle

$(0, 0)$, z ktorej vychádzame, by mala predstavovať súčasnú hodnotu spotovej úrokovej miery. S meniacim sa počtom krokov stromu sa jej hodnota nemení, a my sme ju volili rovnú hodnote 4,64 %. Znova začneme trojkrokovým stromom a počet krokov zvyšujeme až na 180, kedy je dĺžka jedného kroku 6 dní. Sledujeme, ako sa mení cena opcie. Tieto informácie sú uvedené v tabuľke 4.3 a graficky sú znázornené na obrázku 4.2.

počet krokov	dĺžka kroku	cena opcie v €
3	1 rok	30.2789
4	9 mesiacov	30,2573
6	6 mesiacov	30,2356
9	4 mesiace	30,2212
12	3 mesiace	30,2140
18	2 mesiace	30,2068
36	1 mesiac	30,1996
72	15 dní	30,1960
108	10 dní	30,1948
180	6 dní	30,1938

Tabuľka 4.3: Ceny opcie pre rôzny počet krokov binomického stromu



Obr. 4.2: Ceny opcie v závislosti na počte krokov binomického stromu

Záver

V práci sme sa venovali stromom úrokových mier. Zamerali sme sa na ich konštrukciu a oceňovanie pomocou nich.

Ako prvé sme si vysvetlili spôsoby úročenia, zadefinovali si typy úrokových mier z hľadiska časovej štruktúry a uviedli základné informácie z oblasti finančných derivátov. Venovali sme sa aj modelom úrokových mier, pričom sme sa zamerali na jednofaktorové modely.

V tretej časti práce sme zaviedli pojmy binomický a trinomický strom. Podrobne sme opísali konštrukciu týchto stromov použitím Rendlemanovho-Bartterovho a Hullovho-Whiteovho modelu. Ukázali sme si, ako sa využívajú na oceňovanie opcií a finančných tokov.

Po teoretickom opise vlastností stromov sme pomocou nich ocenili opciu na bezkupónový dlhopis. V programe Wolfram Mathematica sme naprogramovali a vygenerovali binomický a trinomický strom. Program sa nachádza na priloženom CD. Počet krokov na oboch stromoch sme postupne zvyšovali a sledovali sme ako sa zmení výsledná cena opcie.

V práci sme uviedli len niektoré z možností využitia stromov úrokových mier. Dajú sa aplikovať nielen pri oceňovaní opcií, ale aj iných finančných derivátov. Zaujímavé sú aj spôsoby kalibrácie jednotlivých parametrov stromov.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Baxter M. W., Rennie A. J. *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [2] Cipra T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Ekopress, 2005.
- [3] Cipra T. *Matematika cenných papírů*. Praha: HZ, 2000.
- [4] Černý J. *Stochastické modelování úrokových sazeb*. Diplomová práce - KPMS UK, Praha, 2011.
- [5] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. *Option pricing: A simplified approach*. Journal of Financial Economics, September 1979.
- [6] Filipović D. *Term-Structure Models: A Graduate Course*. Springer Finance, 2009.
- [7] Ho T. S. Y., Lee S.B. *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*. Journal of Finance 41, 1986.
- [8] Hull J. C. *Option, Futures and Other Derivatives*. 5th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2003.
- [9] Hull J. C., White A. *Pricing Interest-Rate Derivative Securities*. The Review of Financial Studies 3, 1990.
- [10] Kadlečíková, H. *Numerické oceňovanie opcií*. Diplomová práca - FMFI UK, Bratislava, 2010.

Zoznam obrázkov

3.1	Krok binomického stromu	12
3.2	Príklad trojkrového stromu	14
3.3	Štandardný typ	15
3.4	Rastúci typ	15
3.5	Klesajúci typ	15
3.6	Zmena typu vetvenia	17
3.7	Trinomický strom pre R^*	19
3.8	Trinomický strom pre R	21
3.9	Scenár vývoja úrokových mier	24
4.1	Ceny opcie v závislosti na počte krokov trinomického stromu . . .	27
4.2	Ceny opcie v závislosti na počte krokov binomického stromu . . .	28

Zoznam tabuliek

3.1	Príslušné hodnoty pravdepodobností pre uzly	19
3.2	Počiatkové úrokové miery	21
4.1	Počiatková časová štruktúra úrokových mier	26
4.2	Ceny opcie pre rôzny počet krokov trinomického stromu	27
4.3	Ceny opcie pre rôzny počet krokov binomického stromu	28

Prílohy

Príloha č. 1

K práci je priložené CD obsahujúce program stromy.nb, ktorý je naprogramovaný v systéme Wolfram Mathematica 8.0 for Students. Program vygeneruje trinomic-ký a binomický strom pre rôzny počet krokov a následne ním ocení opciu na bezkupónový dlhopis. Taktiež vytvorí grafy závislosti ceny opcie na počte krokov jednotlivých stromov. Na CD sa nachádza tiež táto práca v PDF formáte.